Petre Simion Victor Nicolae
Prof.univ.dr.ing.mat. Augustin Semenescu • Carmen Angelescu
Ovidiu Bădescu • Daniela Boanță • Alexandru Constantinescu
Gabriela Dăneț • Sînziana Dumitran • Jenica Mitrin
Felicia Opran • Cezar Păcuraru • Mădălina Stănescu
Ileana Şerban • Gabriela Tănase • Monica Țopană

MATEMATICĂ

clasa a XI-a

BREVIAR TEORETIC. EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE. TESTE DE EVALUARE TESTE SUMATIVE. MODELE PENTRU TEZĂ

- filiera teoretică
- profilul real
- specializarea științe ale naturii

Consultant:
Prof.univ.dr.mat.em. OCTAVIAN STĂNĂŞILĂ

NICULESCU

CUPRINS

Algebră

Analiză matematică

Răspunsuri

Capitolul I

MATRICE

1. Matrice şi operaţii cu matrice. Adunarea şi scăderea matricelor

IMPORTANT!

Definiţie

O funcţie $A:\{1,2,...,m\}\times\{1,2,...,n\}\to\mathbb{C}$ se numeşte matrice cu m linii şi n coloane (sau de tipul (m,n)) cu coeficienţi în mulţimea $\mathbb{C}$.

$A(i,j)=a_{ij}$, $i=\overline{1,m}$ $j=\overline{1,n}$ (a_{ij} se numesc elementele matricei).

Matrice particulare

1) O matrice de tipul $(1, n)$ se numeşte matrice linie: $A=(a_1a_2...a_n)$.

2) O matrice de tipul $(m,1)$ se numeşte matrice coloană: $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\...\\a_m\end{pmatrix}$

3) O matrice de tipul (m,n) cu toate elementele nule se numeşte matricea zero, notată $O_{m,n}$.

4) Dacă $m = n$ matricea se numeşte pătratică de ordin n:
$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$.

$T_r(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$ se numeşte urma matricei pătratice A.

5) Matrice unitate de ordinul n: $I_n=\begin{pmatrix}1&0&...&0\\0&1&...&0\\0&0&...&1\end{pmatrix}$;

$I_n=(\sigma_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $\sigma_{ij}=\begin{cases}1 \text{ dacă } i=j\\0 \text{ dacă } i\neq j\end{cases}$.

Exemple: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Operaţii cu matrice

Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$. Atunci

$A + B = C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), C = (c_{ij}), c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Proprietăţi

P1: $(A+B)+C = A+(B+C), (\forall) A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P2: $A+B = B+A, (\forall) A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P3: Există $0 \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $A+0 = 0+A = A, (\forall) A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P4: Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ există $(-A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $A+(-A) = (-A)+A = 0_{mn}$;

P5: $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B, (\forall) \alpha \in \mathbb{C}, A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P6: $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A, (\forall) \alpha, \beta \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P7: Pentru $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $T_r(A+B) = T_rA + T_rB$;

P8: $T_r(\alpha A) = \alpha T_r A$.

Exerciţii şi probleme pentru fixarea cunoştinţelor

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \end{pmatrix}$. Determinaţi *x, y, z, t, u, v* astfel încât $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 4 & 3z & 7 \\ u & -v & 2t \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ -x & 2y & u \\ -v & 2z & -1 \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -2 \\ -16 & -11 & 9 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$. Aflaţi *x, y, z, u, v, t* dacă $A + B = C$.

3. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\\ -4 & 5\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Calculați $A-B$.

4. Calculați: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

5. Calculați: $B=2\begin{pmatrix}-1 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & -3\\ 2 & 5 & 4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ -5 & 6 & 12\end{pmatrix}$.

6. Să se determine matricea X dacă: $2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}+2\cdot X=4\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -3 & 2 & 5\end{pmatrix}$.

7. Să se determine matricea X dacă: $2X+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 6\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

8. Să se determine matricea Y dacă: $3Y+5\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 9\end{pmatrix}$.

Exerciții și probleme pentru aprofundarea cunoștințelor

1. Să se determine matricea X dacă: $-5\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 4\\ 15 & -1\end{pmatrix}+2X=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & -2\\ 5 & 4\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

2. Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dacă are loc egalitatea: $3\begin{pmatrix}1 & -1\\ a & 2b\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}c & -2d\\ 1 & 5\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

3. Să se determine matricea X dacă: $2\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}-2X=3\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

4. Determinaţi matricele X şi $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dacă: $\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ 2X-Y=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}.$

5. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $x\begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Să se determine $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ pentru care: $x\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ -1 & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & x \\ 2x & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 4+y \\ z+2 & 4+t \end{pmatrix}$.

Exerciţii şi probleme pentru performanţă

1. Se consideră matricea $A_x=\begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix}$. Demonstraţi că $A_x+A_y=A_{x+y}$.

2. Dacă ω este soluţie a ecuaţiei $x^2+x+1=0$, să se calculeze suma $\sum_{k=1}^{3p}\begin{pmatrix} \omega^k & \omega^{2k} & \omega^{3k} \\ \omega^{3k} & \omega^k & \omega^{2k} \end{pmatrix}$.