

**Petre Simion**

**Victor Nicolae**

**Prof.univ.dr.ing.mat. Augustin Semenescu • Carmen Angelescu**

**Ovidiu Bădescu • Daniela Boanță • Alexandru Constantinescu**

**Gabriela Dăneț • Sînziana Dumitran • Jenica Mitrin**

**Felicia Opran • Cezar Păcuraru • Mădălina Stănescu**

**Ileana Șerban • Gabriela Tănase • Monica Țopănă**

# MATEMATICĂ

clasa a XI-a

**BREVIAR TEORETIC. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME  
PROPUSE ȘI REZOLVATE. TESTE DE EVALUARE  
TESTE SUMATIVE. MODELE PENTRU TEZĂ**

- filiera teoretică ■ profilul real
- specializarea științe ale naturii

**Consultant:**

**Prof.univ.dr.mat.em. OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ**



**NICULESCU**

## Algebră

<b>Capitolul I. Matrice</b> .....	8
1. Matrice și operații cu matrice. Adunarea și scăderea matricelor .....	8
2. Înmulțirea matricelor .....	12
Teste de evaluare .....	19
<b>Capitolul II. Determinanți</b> .....	22
1. Determinantul unei matrice pătrate.....	22
2. Proprietățile determinanților .....	27
3. Aplicații ale determinanților în geometrie .....	33
Teste de evaluare .....	37
<b>Capitolul III. Sisteme de ecuații liniare</b> .....	39
1. Matrice inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și ecuații matriceale .....	39
2. Sisteme liniare .....	47
Teste de evaluare .....	59

## Analiză matematică

<b>Capitolul I. Limite de funcții</b> .....	64
1. Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală – intervale, mărginire, vecinătăți .....	64
2. Limite unei funcții într-un punct.....	72
3. Limite remarcabile. Cazuri de nedeterminare.....	80
Teste de evaluare .....	85
4. Asimptote la graficul unei funcții .....	87
Teste de evaluare .....	92
<b>Capitolul II. Funcții continue</b> .....	93
1. Funcții continue într-un punct, pe o mulțime. Puncte de discontinuitate .....	93
2. Prelungirea prin continuitate. Operații cu funcții continue.....	99
3. Semnul unei funcții continue pe un interval de numere reale. Proprietatea lui Darboux.....	103
Teste de evaluare .....	106

<b>Capitolul III. Funcții derivabile</b> .....	108
1. Derivata unei funcții într-un punct. Funcții derivabile .....	108
2. Operații cu funcții care admit derivată. Derivata de ordin I și II.....	116
Teste de evaluare .....	121
3. Regulile lui L'Hospital .....	123
Teste de evaluare .....	126
<b>Capitolul IV. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatei</b> .....	127
1. Rolul derivatei întâi în studiul monotoniei funcțiilor. Puncte de extrem .....	127
2. Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor .....	137
3. Reprezentarea grafică a funcțiilor .....	142
Teste de evaluare .....	149
<b>Modele pentru teză</b> .....	151
<b>Teste sumative</b> .....	161

### Răspunsuri

<i>Algebră</i> .....	172
<i>Analiză matematică</i> .....	198
<i>Modele pentru teză</i> .....	234
<i>Teste sumative</i> .....	249

## Capitolul I MATRICE

### 1. Matrice și operații cu matrice. Adunarea și scăderea matricelor

#### IMPORTANT!

##### Definiție

O funcție  $A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C}$  se numește matrice cu  $m$  linii și  $n$  coloane (sau de tipul  $(m, n)$ ) cu coeficienți în mulțimea  $\mathbb{C}$ .

$$A(i, j) = a_{ij}, \quad i = \overline{1, m} \quad j = \overline{1, n} \quad (a_{ij} \text{ se numesc elementele matricei}).$$

##### Matrice particulare

1) O matrice de tipul  $(1, n)$  se numește matrice linie:  $A = (a_1 a_2 \dots a_n)$ .

2) O matrice de tipul  $(m, 1)$  se numește matrice coloană:  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$

3) O matrice de tipul  $(m, n)$  cu toate elementele nule se numește matricea zero, notată  $O_{m,n}$ .

4) Dacă  $m = n$  matricea se numește pătratică de ordin  $n$ :

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$T_r(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$  se numește urma matricei pătratice  $A$ .

5) Matrice unitate de ordinul  $n$ :  $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ;

$$I_n = (\sigma_{ij})_{i, j = \overline{1, n}}, \quad \sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

Respect pentru oameni și cărți

Exemple:  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

### Operații cu matrice

Fie  $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), A = (a_{ij}), B = (b_{ij}).$  Atunci

$$A + B = C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), C = (c_{ij}), c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

#### Proprietăți

**P1:**  $(A + B) + C = A + (B + C), (\forall) A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C});$

**P2:**  $A + B = B + A, (\forall) A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C});$

**P3:** Există  $0 \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  astfel încât  $A + 0 = 0 + A = A, (\forall) A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C});$

**P4:** Pentru orice matrice  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  există  $(-A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  astfel încât  $A + (-A) = (-A) + A = 0_{mn};$

**P5:**  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, (\forall) \alpha \in \mathbb{C}, A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C});$

**P6:**  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, (\forall) \alpha, \beta \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C});$

**P7:** Pentru  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}): T_r(A + B) = T_r A + T_r B;$

**P8:**  $T_r(\alpha A) = \alpha T_r A.$

### Exerciții și probleme pentru fixarea cunoștințelor

1. Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \end{pmatrix}.$  Determinați  $x, y, z, t, u, v$  astfel încât

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Fie  $A = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 4 & 3z & 7 \\ u & -v & 2t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ -x & 2y & u \\ -v & 2z & -1 \end{pmatrix}$  și  $C = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -2 \\ -16 & -11 & 9 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$  Aflați  $x, y, z,$

$u, v, t$  dacă  $A + B = C.$

Respect pentru camesi și cărți

3. Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculați  $A - B$ .

4. Calculați:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ .

5. Calculați:  $B = 2 \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -5 & 6 & 12 \end{pmatrix}$ .

6. Să se determine matricea  $X$  dacă:  $2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = 4 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

7. Să se determine matricea  $X$  dacă:  $2X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

8. Să se determine matricea  $Y$  dacă:  $3Y + 5 \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ .

### Exerciții și probleme pentru aprofundarea cunoștințelor

1. Să se determine matricea  $X$  dacă:  $-5 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ .

2. Să se determine  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , dacă are loc egalitatea:  $3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 2b \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} c & -2d \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

3. Să se determine matricea  $X$  dacă:  $2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 2X = 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

Respect pentru oameni și cărți

4. Determinați matricele  $X$  și  $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dacă:

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$$

5. Să se determine  $x, y \in \mathbb{R}$  pentru care  $x \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

6. Să se determine  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$  pentru care:  $x \begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ -1 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & x \\ 2x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4+y \\ z+2 & 4+t \end{pmatrix}$ .

### Exerciții și probleme pentru performanță

1. Se consideră matricea  $A_x = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix}$ . Demonstrați că  $A_x + A_y = A_{x+y}$ .

2. Dacă  $\omega$  este soluție a ecuației  $x^2 + x + 1 = 0$ , să se calculeze suma

$$\sum_{k=1}^{3p} \begin{pmatrix} \omega^k & \omega^{2k} & \omega^{3k} \\ \omega^{3k} & \omega^k & \omega^{2k} \end{pmatrix}$$